

Transformata $F(s)$ definită de (2.37) este univocă și se numește *transformata Laplace directă*. **Transformata Laplace inversă** este **univocă numai în cazul funcțiilor $f(t)$ continue** și se definește prin relația (2.39) și se notează

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2.39)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \text{ sau } F(s) \rightarrow f(t).$$

Transforma Laplace inversă permite **determinarea funcției originale $f(t)$** , când se **cunoaște funcția imagine $F(s)$**

Utilizarea transformatei Laplace în studiul sistemelor dinamice prezintă **următoarele avantaje**:

- a) Transformata Laplace **transformă operațiile de derivare și de integrare din domeniul timpului în operații algebrice (înmulțire și împărțire cu s)**.

b) În domeniul timpului, **la rezolvarea ecuațiilor diferențiale** se determină mai întâi o **soluție generală** dependentă de **n constante de integrare**, care sunt apoi determinate impunând ca soluția generală să satisfacă anumite **condiții inițiale**. Prin utilizarea **transformatei Laplace, condițiile inițiale sunt considerate de la început**.

c) În domeniul timpului se determină întâi **soluția generală a ecuației omogene și** apoi utilizând **metoda variației constantelor**, se determină o **soluție particulară a ecuației neomogene**. În domeniul complex utilizând **transformata Laplace soluțiile ecuației omogene și ecuației neomogene se pot determina independent**.

În evoluția sistemelor dinamice **unele semnale apar cu o anumită întârziere** față de un anumit moment convențional ales ca $t = 0$.

Fie $f: t \rightarrow f(t)$, cu $f(t) = 0$ pentru $t < 0$ (fig. 2.5.a) și funcția $g: t \rightarrow g(t) = f(t - \tau)$; $g(t) = 0$ pentru $t < \tau$; $\tau > 0$, fig. 2.5.b. Atunci

$$F(s) = L\{f(t)\} \text{ și } L\{g(t)\} = L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s) \quad (2.40)$$

Intârzierii temporale îi corespunde înmulțirea imaginii cu $e^{-s\tau}$.

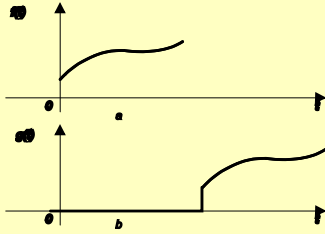


Fig. 2.5

Transformata Laplace se poate aplica și distribuțiilor. Deoarece transformata Laplace unilaterală se aplică funcțiilor definite pe $[0, +\infty)$, se consideră numai distribuțiile din $(-\infty, +\infty)$ cu suport în $[0, +\infty)$.

Dacă T este o distribuție cu suport în $[0, +\infty)$ și dacă există un număr real σ_0 astfel ca $e^{-\sigma_0 t} T$ să fie o distribuție temperată

atunci pentru $\text{Re } s = \sigma > \sigma_0$ se definește transformata Laplace a distribuției T prin relația

$$L\{T\} = \langle T, e^{-st} \rangle. \quad (2.41)$$

Distribuțiile $\delta(t)$, $\delta(t - \tau)$, $D^k \delta(t)$, $D^k \delta(t - \tau)$ sunt distribuții temperate.

Transformata Laplace a distribuției Dirac $\delta(t)$ se calculează cu relația

$$L\{\delta(t)\} = \langle \delta(t), e^{-st} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt \quad (2.42)$$

$$e^{-st} \delta(t) = \left(e^{-st} \right)_{t=0} \delta(t) = 1 \delta(t)$$

pentru ca
 $g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)$.

Din (2.42) se obține

$$L\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \delta(t) dt = 1. \quad (2.44)$$

Pentru distribuțiile $\delta(t - \tau)$, $D^k \delta(t)$, $D^k \delta(t - \tau)$ transformatele Laplace se determină cu relațiile

$$L\{\delta(t - \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s\tau} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} L\{D^k \delta(t)\} &= \langle D^k \delta(t), e^{-st} \rangle = \langle \delta(t), (-1)^k \frac{d^k e^{-st}}{dt^k} \rangle = \\ &= \langle \delta(t), s^k e^{-st} \rangle = s^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = s^k \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$L\{D^k \delta(t - \tau)\} = s^k e^{-s\tau}. \quad (2.47)$$

Se consideră o funcție $f(t)$ discontinuă în $t = 0$, și derivabilă pentru $t > 0$. Conform relației (1.29) derivata distribuției $[f]$ asociată funcției $f(t)$ este

$$[f]' = [f'] + [f(0_+) - f(0_-)] \delta(t) \quad (2.48)$$

$[f]'$ este **derivata generalizată**, sau **derivata în sens distribuții a funcției** discontinue $f(t)$ și se notează

$$[f]' = D f(t). \quad (2.49)$$

Aplicând transformata Laplace în (2.48) rezultă

$$L\{[f]'\} = L\{[f']\} + [f(0_+) - f(0_-)] L\{\delta(t)\}. \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} L\{[f']\} &= L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+) \\ L\{\delta(t)\} &= 1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Ținând seama de (2.51) din (2.50) se obține

$$L\{ [f]' \} = L\{ D f(t) \} = s F(s) - f(0_-). \quad (2.52)$$

Daca **funcția $f(t)$ este continua în $t = 0$** , $f(0_+) = f(0_-)$, **transformata Laplace a derivatei în sens distributii coincide** cu transformata **derivatei obisnuite**.

Pentru o funcție $f(t)$ cauzala, $f(0_-) = 0$ si transformata Laplace a derivatei în sens distributii devine

$$L\{ Df(t) \} = sL\{ f(t) \} = sF(s) \quad (2.53)$$

Pentru o **funcție $f(t)$ cu discontinuitati de speta întâi**, fig. 2.6.a, **derivata sa generalizata va contine impulsuri Dirac** în punctele de discontinuitate, fig. 2.6.b.

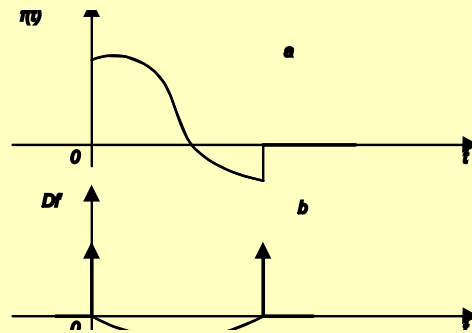


Fig. 2.6

2.2.1.3. Functii de transfer ale sistemelor dinamice netede

2.2.1.3.1. Functia de transfer. Definitie. Proprietati
Marimea de iesire, $y(t)$, a unui sistem dinamic, este influentata de marimea de intrare $u(t)$ si de evolutia anterioara a sistemului. Se considera sistemele monovariabile care pleaca din repaus, deci

$$\begin{aligned} u(t) &= 0, \text{ pentru } t < 0 \\ y(t) &= 0, \text{ pentru } t < 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Derivatele acestor marimi sunt nule pentru $t < 0$

$$\begin{aligned} u^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, (m-1) \\ y^{(k)}(0) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Se considera un **sistem liniar continuu** monovariabil, descris de **ecuatia diferentiala**

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) &= \\ = b_m^{(m)}(t) + \dots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t) & \\ m \leq n ; t \in \mathfrak{R} & \end{aligned} \quad (2.56)$$

Se presupune ca **sistemul fizic**, realizeaza **derivarea în sens distributii**. Transformatele Laplace ale marimilor de intrare si iesire sunt

$$U(s) = L\{ u(t) \} ; Y(s) = L\{ y(t) \} \quad (2.57)$$

Se aplica transformata Laplace directa, ecuatiei (2.56) pentru **conditiile initiale nule** (2.55) si se obtine

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + \dots + b_1s + b_0)U(s) \quad (2.58)$$

$$\text{sau } Y(s) = H(s)U(s) \quad (2.59)$$

Definitie: Functia de transfer a unui sistem liniar monovariabil continuu **este raportul dintre transformata Laplace a marimii de iesire si transformata Laplace a marimii de intrare**, pentru **conditii initiale nule** ale sistemului. Din (2.59) rezulta functia de transfer (*f.d.t*) $H(s)$ de forma

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (2.60)$$

Deoarece functia de transfer $H(s)$ **este o functie rationala** orice sistem monovariabil descris de o ecuatie diferentiala de ordin n se numeste **element rational de transfer sau R – element**.

Functia de transfer este o functie de variabila complexa, $s = \sigma + j\omega$, si constituie o abstractizare în spatiul functiilor imagine, a structurii unui element rational de transfer.

Polinomul $P(s)$ este polinomul caracteristic al ecuatiei (2.56). Ecuatia (2.59) se poate reprezenta sub forma schemei bloc din fig. 2.7.

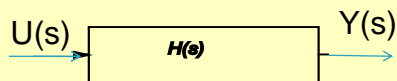


Fig. 2.7

PROPRIETATI - O functie de variabila complexa, care este **reala** atunci când **variabila independenta este reala**, se numeste **functie reala în sens larg**.

Deoarece **coeficientii** care apar în **functia $H(s)$** , definita prin (2.60) **sunt reali**, rezulta ca **functiile de transfer** ale elementelor rationale de transfer sunt **functii reale**.

O consecinta a acestui fapt este **proprietatea de reflexie a functiei de transfer**.

$$H(\bar{s}) = \overline{H(s)} ; (\bar{} = \text{conjugat}) \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \overline{H(s)} &= \overline{\left[\frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right]} = \\ &= \frac{\overline{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}}{\overline{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}} = \\ &= \frac{b_m \bar{s}^m + \dots + b_1 \bar{s} + b_0}{\bar{s}^n + a_{n-1} \bar{s}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{s} + a_0} = \frac{b_m (\bar{s})^m + \dots + b_1 \bar{s} + b_0}{(\bar{s})^n + a_{n-1} (\bar{s})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{s} + a_0} = H(\bar{s}) \end{aligned}$$

Ca urmare a proprietatii de reflexie polii si zerourile functiei de transfer $H(s)$ sunt fie reali, fie în perechi complex conjugate.

Radacinile numaratorului functiei $H(s)$, deci ale ecuatiei $Q(s) = 0$, notate z_1, z_2, \dots, z_m **sunt zerourile finite** ale functiei $H(s)$. **Radacinile numitorului functiei $H(s)$** , deci ale ecuatiei $P(s) = 0$ notate p_1, p_2, \dots, p_n sunt **polii finiti ai functiei $H(s)$** . Tinând seama de zerouri si poli, functia de transfer $H(s)$ se poate scrie sub forma factorizata

$$H(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (2.62)$$

Daca $m > n$, la cei n poli finiti se adauga si punctul de la ∞ ca pol de ordinul $m - n$, astfel ca numarul total de poli este $n + (m - n) = m$, egal cu numarul de zerouri.

Daca $m < n$, la cele m zerouri finite se adauga si punctul de la ∞ ca zero de ordinul $n - m$, astfel ca numarul total de zerouri este $m + (n - m) = n$, deci egal cu numarul de poli.

2.3.1.3.2 Reprezentari grafice ale functiei de transfer. Principiul argumentului

- ▶ Orice functie de transfer $H(s)$, fiind o functie de variabila complexa $s = \sigma + j\omega$, poate fi scrisa

$$H(s) = H_{Re} + j H_{Im} \quad (2.63)$$

si poate fi reprezentata într-un plan complex cu coordonatele H_{Re} si jH_{Im} denumit **planul $H(s)$** . Daca **variabila complexa s descrie un contur închis C** în planul s , fig. 2.8.a, atunci **$H(s)$ descrie de asemenea un contur închis în planul $H(s)$** , fig. 2.8.b.

Teorema (Cauchy): Daca o functie meromorfa $H(s)$ are z zerouri si p poli în interiorul unui contur închis C si nu are nici un zero si nici un pol pe conturul C , atunci

$$\int_C \frac{H'(s)}{H(s)} ds = 2\pi j (z - p) \quad (2.64)$$

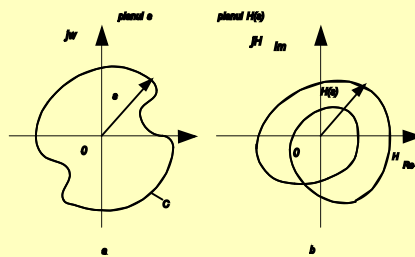


Fig. 2.8

Se aplica **teorema reziduurilor derivatei logaritmice a functiei** de transfer $H(s)$.

Se presupune ca în interiorul conturului C , $H(s)$ are zerourile z_i cu ordinele de multiplicitate m_i , $i = 1, 2, \dots, \mu$, si polii p_j , cu ordinele de multiplicitate n_j , $j = 1, 2, \dots, v$, astfel ca

$$\sum_{i=1}^{\mu} m_i = z \quad \sum_{j=1}^{\nu} n_j = p$$

Pentru functia $H'(s)/H(s)$, atât zerourile z_i cât și poliile p_j sunt singularități de tip pol.

Fie z_1 zeroul de ordin de multiplicitate m_1 . Se pot scrie relațiile

$$\begin{aligned} H(s) &= (s - z_1)^{m_1} H_1(s) \\ H'(s) &= m_1 (s - z_1)^{m_1 - 1} H_1(s) + (s - z_1)^{m_1} H_1'(s) \\ \frac{H'(s)}{H(s)} &= \frac{m_1}{s - z_1} + \frac{H_1'(s)}{H_1(s)} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Rezultă că z_1 este pol pentru $H'(s)/H(s)$ și că $m_1/(s - z_1)$ este termenul de rang (-1) din dezvoltarea în serie în (2.65) Laurent a funcției $H'(s)/H(s)$:

$$\frac{H'(s)}{H(s)} = \sum_{k=-p}^{\infty} C_k (s - z_1)^k$$

Coeficientul acestui termen este reziduul corespunzător polului z_1 al funcției $H'(s)/H(s)$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{C_{z_1}} \frac{H'(s)}{H(s)} ds = \text{Rez}(z_1) = m_1 \quad (2.66)$$

unde C_{z_1} este un contur ce cuprinde în interiorul său zeroul z_1 .

Dacă se repetă raționamentul pentru toate zerourile z_1, z_2, \dots, z_{μ} rezultă

$$\sum_{i=1}^{\mu} \text{Rez}(z_i) = \sum_{i=1}^{\mu} m_i = z \quad (2.67)$$

Pentru polul p_1 de multiplicitate n_1 se pot scrie relațiile

$$H(s) = \frac{H_2(s)}{(s - p_1)^{n_1}}$$

$$H'(s) = \frac{(s - p_1)H_2'(s) - n_1 H_2(s)}{(s - p_1)^{n_1+1}} \quad (2.68)$$

$$\frac{H'(s)}{H(s)} = -\frac{n_1}{s - p_1} + \frac{H_2'(s)}{H_2(s)}$$

Din (2.68) rezulta ca p_1 este pol pentru functia $H'(s)/H(s)$, iar reziduul corespunzator acestui pol este

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_{p_1}} \frac{H'(s)}{H(s)} ds = \text{Rez}(p_1) = -n_1 \quad (2.69)$$

Calculând reziduurile pentru toti polii p_1, p_2, \dots, p_v rezulta

$$\sum_{j=1}^v \text{Rez}(p_j) = \sum_{j=1}^v (-n_j) = -p \quad (2.70)$$

Din (2.66) si (2.70) se obtine imediat relatia (2.64)

$$\int_C \frac{H'(s)}{H(s)} ds = 2\pi j \left(\sum_{i=1}^{\mu} \text{Rez}(z_i) + \sum_{j=1}^v \text{Rez}(p_j) \right) = 2\pi j(z - p)$$

O consecinta importanta a acestei teoreme, cunoscuta si sub numele de **principiul argumentului** rezulta prin **integrarea membrului stâng din relatia (2.64)**. Se obtine

$$[\ln H(s)]_C = 2\pi j(z - p) \quad (2.71)$$

Dar pentru orice s se poate scrie $H(s) = |H(s)| e^{j \arg H(s)}$

$$[\ln |H(s)|]_C + j [\arg H(s)]_C = 2\pi j(z - p)$$

Deoarece variatia pentru $[\ln |H(s)|]$ pe curba închisa C este nula

$$[\arg H(s)]_C = 2\pi(z - p) \quad (2.74)$$

Relatia (2.74) arata ca atunci **când s parcurge conturul C o singura data** în sens **pozitiv** fazorul $H(s)$ se rotește în **jurul originii planului $H(s)$** de $|z - p|$ ori într-un sens dat de semnul diferenței $z - p$.

Dintre toate contururile C posibile, în studiul sistemelor automate prezinta interes **conturul Nyquist** care este **un semicerc** cu centrul în **originea axelor planului s** având raza infinit mare si limitat la stânga de axa imaginara, fig. 2.9.

Conturul Nyquist exploreaza semiplanul drept al planului s în vederea analizei stabilitatii sistemelor dinamice. Parcurgerea axei imaginare din cadrul acestui contur, pentru valori ale lui $\omega \in (-\infty, +\infty)$, echivaleaza cu cunoasterea hodografului vectorului $H(j\omega)$ care reprezinta raspunsul la frecventa al unui sistem dinamic caracterizat de functia de transfer $H(s)$.

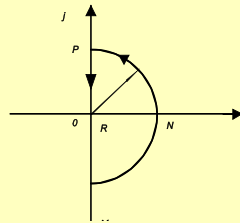


Fig. 2.9

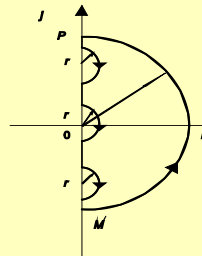


Fig. 2.10

Unele functii de transfer au adesea **poli si zerouri situati pe axa imaginara** a planului s , care constituie **puncte singulare**.

Aceste puncte **se exclud din conturul C** prin ocolirea lor cu **semicercuri de raza infinit mica**, asa cum se arata în fig. 2.10. Daca notam cu z_0 si p_0 - numarul de zerouri, respectiv numarul de poli, de pe axa imaginara, relatiile: (2.64) si (2.74)

$$\int_C \frac{H'(s)}{H(s)} ds = 2\pi j (z - p) + \pi j (z_0 - p_0) \quad (2.75)$$

$$[\arg H(s)]_C = 2\pi (z - p) + \pi (z_0 - p_0) \quad (2.76)$$

În funcție de valorile m, n funcția $H(s)$, are în punctul de la infinit un **zerou de ordinul $n - m$** sau un **pol de ordinul $m - n$** . Pentru conturul Nyquist din fig. 2.9, integrala din relația (2.64) se poate scrie

$$\int_C \frac{H'(s)}{H(s)} ds = \int_{MNP} \frac{H'(s)}{H(s)} ds + \int_{PM} \frac{H'(s)}{H(s)} ds \quad (2.77)$$

Arcul MNP este descris de relația $s = Re^{j\theta}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], R \rightarrow \infty$ (2.78)

Zerourile z_1, z_2, \dots, z_μ , și **polii** p_1, p_2, \dots, p_ν ai funcției de transfer $H(s)$ **se pot neglija în raport cu variabila $s \in MNP$** încât, în expresia lui $H(s)$, se pot considera numai termenii de grad maxim de la numărător și respectiv de la numitor. În aceste condiții se scrie

$$H(s) \cong b_m s^{m-n}; H'(s) \cong b_m (m-n) s^{m-n-1}; \frac{H'(s)}{H(s)} \cong \frac{m-n}{s} \quad (2.79)$$

$s \in \overline{MPN}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{MNP} \frac{H'(s)}{H(s)} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{MNP} \frac{m-n}{s} ds = (m-n) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Rje^{j\theta}}{Re^{j\theta}} d\theta$$

$$j(m-n) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = j\pi(m-n) = j\pi(n-m) \quad (2.80)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |H(s)| = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} R^{m-n} = 0, \text{ pentru } n > m$$

Rezulta ca atunci când $n > m$, **parcurea în planul s în sens pozitiv a semicercului de raza infinit mare al conturului Nyquist**, de la $\theta = -\pi/2$ la $\theta = +\pi/2$, da nastere în planul $H(s)$, unei **circumferinte de raza infinit mica, cu centrul în originea axelor**, care înconjoara aceasta origine în sens negativ cu unghiul $(n - m)\pi$ sau de $(n - m)/2$ ori începând de la $+(n - m)\pi/2$ când $\omega = -\infty$.

Tinând seama de (2.77) si (2.80), relatiile (2.75) si (2.76) devin

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{PM} \frac{H'(s)}{H(s)} ds = 2\pi j(z - p) + \pi j(z_0 - p_0) - j\pi(m - n) \quad (2.81)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [\arg H(s)]_{PM} = 2\pi(z - p) + \pi(z_0 - p_0) - \pi(m - n) \quad (2.82)$$

La limita PM coincide cu axa imaginara a planului s pentru care $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$ si relatiile (2.81), (2.82) se scriu în forma

$$- \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{H'(s)}{H(s)} ds = 2\pi j(z - p) + \pi j(z_0 - p_0) - j\pi(m - n) \quad (2.83)$$

$$- \arg H(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi(z - p) + \pi(z_0 - p_0) - \pi(m - n) \quad (2.84)$$

Relatia (2.84) exprima **variata argumentului fazorului $H(j\omega)$** când ω variaza de la $-\infty$ la $+\infty$.

Exemplul 2.4 Fie functia de transfer

$$H(s) = \frac{k}{T_1 s (T_2 s + 1)} = \frac{k}{T_1 T_2} \frac{1}{s(s + \frac{1}{T_2})} \quad (2.85)$$

Sa se reprezinte grafic $H(s)$ si $H(j\omega)$ pentru s apar tinând conturului Nyquist si respectiv axei imaginare a planului s .

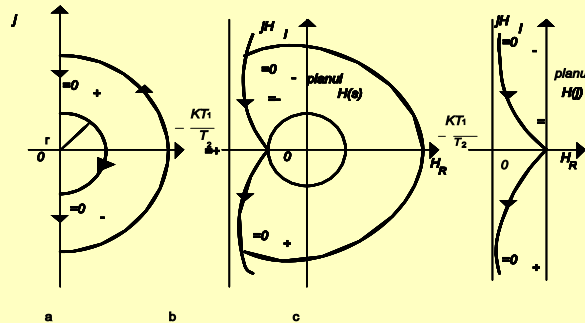


Fig.2.11

Aceasta functie de transfer admite un pol în origine si unul în semiplanul s stâng. Pentru aceasta functie: $m = 0$, $n = 2$, $z = 0$, $p = 0$, $z_0 = 0$, $p_0 = 1$. Conturul Nyquist pentru $H(s)$ este reprezentat în fig. 2.11.a. Pe semicercul de raza infinit mica $s = r.e^{j\varphi}$, $r \rightarrow 0$, $s + 1/T_2 = 1/T_2$ si deci

Conturul Nyquist pentru $H(s)$ este reprezentat în fig. 2.11.a. Pe semicercul de raza infinit mica $s = r.e^{j\varphi}$, $r \rightarrow 0$, $s + 1/T_2 = 1/T_2$ si

$$H(s) \cong \frac{k}{T_1 T_2} \frac{1}{s} = \frac{k}{s T_1} = \frac{k}{T_1 r} e^{-j\varphi}; \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.86)$$

Pe acest semicerc $\lim_{r \rightarrow 0} |H(s)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{k}{T_1 r} = \infty \quad (2.87)$

Semicercul de raza infinit mica din **planul s** , când ω variaza de la $\omega = 0_+$ la $\omega = 0_-$ este transformat în **planul $H(s)$** , într-un **semicerc de raza infinit mare**, în sens pozitiv, de la $\varphi = -\pi/2$ la $\varphi = +\pi/2$.

Când **s variaza dupa semicercul mare al conturului Nyquist**, în **planul $H(s)$** se obtine o **circumferinta de raza constanta si infinit mica**, care înconjoara originea în sens negativ de la $(n-m)\pi/2 = 2\pi/2 = \pi$, când $\omega = -\infty$, la $-\pi$, când $\omega = +\infty$.

Pentru restul conturului Nyquist $s = j\omega$, deci

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{k}{T_1 T_2} \frac{1}{j\omega \left(j\omega + \frac{1}{T_2} \right)} = H_{Re}(\omega) + jH_{Im}(\omega) = \\ &= \frac{k}{T_1 T_2} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{T_2^2}} + j \frac{k}{T_1 T_2^2} \frac{1}{\omega \left(\omega^2 + \frac{1}{T_2^2} \right)}. \end{aligned}$$

Când $\omega \rightarrow 0$ se obține

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H_{Re} = -\frac{kT_2}{T_1}; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} H_{Im} = -\infty$$

Deci $H(s)$ pentru $s = j\omega$ admite o **asimptotă paralelă cu axa imaginara de abscisa** - kT_2/T_1 . Când $\omega \rightarrow \infty$, $H_{Re}(\omega) = H_{Im}(\omega) = 0$. În acest fel în planul $H(s)$ se obține reprezentarea grafică din fig. 2.11.b, iar în planul $H(j\omega)$, reprezentarea grafică din figura 2.11.c.